Conceptos previos

Propiedades sobre límites de sucesiones reales:

1) Si αn y βn son dos sucesiones Є IR tales que:

$$\lim_{n\to\infty} \alpha n = L \quad \wedge \quad \lim_{n\to\infty} \beta n = L'$$

Entonces:

$$\lim_{n\to\infty} (\alpha n + \beta n) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2} + \lim_{n\to\infty} \beta n = L + L'$$

Ejemplo:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2} + \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2}$$

2) $$\lim_{n\to\infty} (\alpha n \times \beta n) = \lim_{n\to\infty} \alpha n \times \lim_{n\to\infty} \beta n = L \times L'$$

Ej.: $$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n}$$

$$= \left[\lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})\right] \times \left[\lim_{n\to\infty} (1-\frac{1}{n})\right]$$

= 1 x 1= 1

3) Si αn es una sucesión convergente, esto es $\lim_{n\to\infty} \alpha n = L$ y k es un numero real, entonces la sucesión k αn también es convergente y se cumple

.

$$\lim_{n\to\infty} (k \times \alpha n) = k \times \lim_{n\to\infty} \alpha n$$

Ej.: $$\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}=3\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=3\times 0=0$$

4) Si αn y βn dos sucesiones convergentes tales que

$$\lim_{n\to\infty}\alpha n=L;\ \lim_{n\to\infty}\beta n=L';L'\neq 0$$

Entonces:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha n}{\beta n}=\frac{\lim_{n\to\infty}\alpha n}{\lim_{n\to\infty}\beta n}$$

NOTA:

1) Es posible que la suma de dos sucesiones divergentes sea convergente.

2) Si αn y βn son dos **sucesiones tales que αn≥βn u cuyos limite son, respectivamente**.

$$\lim_{n\to\infty}\alpha n=L \qquad \lim_{n\to\infty}\beta n=L',\text{entonces}: L< L'$$

3) Si: $\lim_{n\to\infty}\alpha n=L$, entonces

$$\lim_{n\to\infty}(-\alpha n)=-\lim_{n\to\infty}\alpha n=-L$$

Observación **importantísimo**: no siempre es posible aplicar las propiedades “literalmente” sobre límites de sucesiones, si antes no se ha realizado una transformación a la expresión que define el término general de la sucesión.

Ej.: $\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{5n-2}$

Si aplicamos la propiedad del cuociente de límites, tenemos.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{5n-2}=\frac{\lim_{n\to\infty}3n+1}{\lim_{n\to\infty}5n-2}=\frac{\infty}{\infty}=\infty$$

Es decir carece de límite finito, ya que el denominador y el numerador no tienen límite real definido.

Sin embargo podemos simplificar el numerador y el denominador por "n", de manera que el termino general αn, se transforme (debemos buscar siempre la forma $\frac{1}{n^p}$ ya que $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^1} = 0; p\in IR$)

Entonces:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{5n-2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3n+1}{n}}{\frac{5n-2}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n}}{5-\frac{2}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{5n-2} = {}^{3}/_{5}$$

Nota: Para cualquier limite de una sucesión αn que tiene por término general un cuociente de dos polinomios, e divide el numerador y el denominador por la potencia de "n" que tiene el mayor exponente en dichos polinomios.

Ej.:1)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-4n^4-5n+6\ /n^4}{3n^4+\ 7n^2+8n-1\ /n^4} = \lim_{n\to\infty}\frac{-4-\frac{5}{n^3}+\frac{6}{n^4}}{3+\frac{7}{n^2}+\frac{8}{n^3}-\frac{1}{n^4}} = -\frac{4}{3}$$

Ej.:2)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2-n+2\ /:n}}{6n-8\ /:n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{n^2-n+2}{n^2}}}{6-\frac{8}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}}{6-\frac{8}{n}} = \frac{1}{6}$$

Ejercicios:

I) Calcule el límite de cada una de las siguientes sucesiones cuando: $n\to\infty$

$1)\frac{3n^2-2n+5}{n^2}$ $\quad 2)\frac{2n^2-5n+7}{3n^2}$ $\quad 3)3n\frac{3n}{n+1}$ $\quad 4)\frac{(n+1)^2}{2n^2}$ $\quad 5)\frac{2}{n^3}\div\frac{5}{n^2}$

$6)\frac{n^2+3}{n^2}+\frac{n^2+1}{n^3}$ $\quad 7)\frac{n^4+n^3}{7n^5}$ $\quad 8)\frac{(4n+5)(7-n^3}{n^4}$

II) Dadas las sucesiones:

Si $\alpha n=\frac{3n+1}{n}$ y $\beta n=\frac{n^2+1}{n^2}$ calcule $\lim_{n\to\infty} de$:

$$1)\alpha n - \beta n \quad 2)\alpha n \times \beta n \quad 3)\frac{\alpha n}{\beta n} \quad 4)\alpha n + \beta n \quad 5)\frac{3}{7}\alpha n + 8\beta n$$

III) Calcule los siguientes límites $\lim_{n\to\infty} de$:

$$1)\frac{n^2+5n-2}{2n^2+1} \qquad 2)\frac{n^4-n+2}{3n^4-n^2} \qquad 3)\frac{2n^3-n^2+1}{7n^3+n-3} \qquad 4)\frac{4}{\sqrt{n+7}+\sqrt{n}} \qquad 5)\frac{1}{\sqrt{n+2\sqrt{n}}}$$

$$6)\left|\sqrt{n(n+2)}-n\right| \qquad 7)\frac{9}{\sqrt{n+100}+\sqrt{n}} \qquad 8)|\sqrt{2n^2+3n-n}-\sqrt{2n^2+2}\,|$$

Respuestas:

I)	II)	III)
1) 3	1) 3	1)1/2
2)2/3	2) 0	2)1/3
3) 0	3) ∞	3)2/7
4)1/2	4)3	4)0
5) 0	5)9/7	5)0
6) 1		6)2
7) 0		7)0
8)-4		8)$\frac{3}{4}\sqrt{2}$

Es el caso de una sucesión muy particular y de gran interés en matemáticas especialmente en el cálculo infinitesimal.

La sucesión

$An = (1+1/n)^n$, si aplicamos límites a esta sucesión se obtiene

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Con la ayuda de una calculadora científica, se ha determinado algunos valores para esta sucesión.

n	1	2	3	10	100	1000	1000000
An	2	2,25	2,3703	2,5937	2,7169	2,718146	2,718282

En la tabla vemos que para valores significativamente grandes de n, el valor de An se “estabiliza” y crece muy débilmente.
Esta sucesión es creciente y acotada An Є IN; $2\leq An\leq 3$, luego tiene límite.
Al límite de esta sucesión se le denomina numero e

Luego: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e$

E=2,7182818284590452353602

Donde e es un número irracional (desarrollo decimal infinito no periódico)
NOTA: El matemático suizo Leonard Euler (1707-1783), discípulo de Jean Bernoulli, estudio esta situación, cuyo límite se denomina con la letra inicial “e” de su apellido.
Ejemplo: Calculemos los siguientes limites

1.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+7}$$

Que se escribe como:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \times \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{7}$$

E x 1

e

2.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n} = \lim_{n\to\infty}[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}]^{3}$$

$$= e^{3}$$

3.

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}$ que se escribe como

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}$ si ahora hacemos que $p=-n$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{-p} = \lim_{n\to\infty}\ [\left(1+\frac{1}{p}\right)^{p}]^{-1}$$

$$= e^{-1} = \frac{1}{e}$$

4. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ que equivale a

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n+5}\right)^{n}\times\left(1+\frac{1}{n+5}\right)^{5}}{\left(1+\frac{1}{n+5}\right)^{5}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n+5}\right)^{n+5}}{\left(1+\frac{1}{n+5}\right)^{5}}$$

$$=\frac{e}{1}=e$$

Ejercicios:

Calcule los límites de las siguientes sucesiones cuando $n \to \infty$

1) $(1+\frac{1}{n})^{n+6}$ 2) $(1+\frac{1}{n})^{2n}$ 3) $(1+\frac{1}{n})^{-4n}$

4) $(1+\frac{1}{n+4})^{n}$ 5) $(1-\frac{1}{n})^{2n}$ 6) $(1+\frac{1}{n+2})^{n+2}$

7) $((n+1)/n)^{9n}$ 8) $((n+1)/n)^{n+10}$

Respuestas:

1. e
2. e^2
3. e^{-4}
4. e
5. e^{-2}
6. e
7. e^9
8. e

I) encuentra el valor límite de cada una de las sucesiones.

1) αn= $\frac{1}{n}$ 2) αn= -3 + $\frac{(-1)^n}{n}$ 3) αn= $\frac{n+2}{n}$ 4) αn= $\frac{(-1)^{n+1}}{n}$

5) αn= 2 + $\frac{1}{n+1}$ 6) αn= $\frac{3n-2}{n+1}$ 7) αn= $\frac{2n-1}{2n}$ 8) αn= $1+\frac{1}{n}$

II) Dada la sucesión αn= $1+\frac{1}{n}$

a) ¿Para qué valor de n se verifica que αn Є$1-\frac{1}{2}$], $1+\frac{1}{2}$[?

b) Si se considera ε= $\frac{3}{10}$, ¿para qué valor de n se verifica que

αn Є]$1-\frac{3}{10}$, $1+\frac{3}{10}$[?

III]) Dada la sucesión αn=$-3 + \frac{(-1)^n}{n}$; ¿Para qué valor de ε se cumple que

αn=]-3 – ε , -3 +ε[?

IV) Indica cuales de las siguientes sucesiones son convergentes y cuales son divergentes.

1)$\frac{n^2}{n^2+1}$ 2)$\frac{n^2+1}{n}$ 3)$\frac{3n^2-1}{n}$ 4)$\frac{2n-1}{n}$ 5)$\frac{2n}{2n+1}$ 6)$\frac{1}{n+1}$

7)$\frac{2n-8}{3}$ 8)$\frac{2n-3}{n+1}$

Respuestas:

I) 1)0	II)1) n≥3	III) ε > $\frac{1}{n}$	IV) 1) convergentes
2)-3	2) n≥4		2) divergentes
3)1			3) divergentes
4)0			4) convergentes
5)2			5) convergentes
6)3			6) convergentes
7)1			7) divergentes
8)1			8) convergentes